

2013年7月23日火曜日

**問題 1.** 任意の正の整数の組  $(k, n)$  に対して, ある  $k$  個の (相異なるとは限らない) 正の整数  $m_1, m_2, \dots, m_k$  が存在して

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right)$$

となることを示せ.

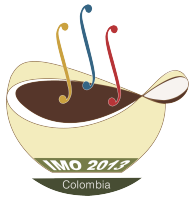
**問題 2.** 4027 個の点が平面上にある. この点の配置が**コロンビア風**であるとは, それらが 2013 個の赤い点と 2014 個の青い点からなり, どの 3 点も同一直線上にないことである. 平面上に何本かの直線を引くと, 平面はいくつかの領域に分かれる. あるコロンビア風の点の配置に対し, 以下の 2 つの条件をみたす直線の集合は**良い**と定義する:

- どの直線も配置中の点を通らない.
- 直線によって分けられたどの領域も, 両方の色の点を含むことはない.

どのようなコロンビア風の配置に対しても,  $k$  本の直線からなる良い集合が存在するような  $k$  の最小値を求めよ.

**問題 3.** 三角形  $ABC$  の  $\angle A$  内の傍接円が辺  $BC$  と接する点を  $A_1$  とする. 同様に  $\angle B$  内の傍接円と  $\angle C$  内の傍接円を用いて, それぞれ辺  $CA$  上の点  $B_1$  と辺  $BC$  上の点  $C_1$  を定義する. 三角形  $A_1B_1C_1$  の外心が三角形  $ABC$  の外接円上にあるとき, 三角形  $ABC$  は直角三角形であることを示せ.

三角形  $ABC$  の  $\angle A$  内の**傍接円**とは, 辺  $BC$ , 辺  $AB$  の点  $B$  側への延長線, および辺  $AC$  の点  $C$  側への延長線に接する円のことをさす.  $\angle B$ ,  $\angle C$  内の傍接円も同様に定める.



2013年7月24日水曜日

**問題 4.** 鋭角三角形  $ABC$  の垂心を  $H$  とし,  $W$  を辺  $BC$  上の ( $B, C$  とは異なる) 点とする.  $B$  から  $AC$  へ下ろした垂線の足を  $M$ ,  $C$  から  $AB$  へ下ろした垂線の足を  $N$  とする.  $\omega_1$  を三角形  $BWN$  の外接円とし,  $\omega_1$  上の点  $X$  を  $WX$  が  $\omega_1$  の直径であるようにとる. 同様に,  $\omega_2$  を三角形  $CWM$  の外接円とし,  $\omega_2$  上の点  $Y$  を  $WY$  が  $\omega_2$  の直径であるようにとる.  $X, Y, H$  は同一直線上にあることを示せ.

**問題 5.**  $\mathbb{Q}_{>0}$  を正の有理数の集合とする.  $f: \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  を次の3つの条件をみたす関数とする:

- (i) すべての  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$  に対して  $f(x)f(y) \geq f(xy)$ ,
- (ii) すべての  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$  に対して  $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ ,
- (iii) ある有理数  $a > 1$  が存在して  $f(a) = a$ .

このとき, すべての  $x \in \mathbb{Q}_{>0}$  に対して  $f(x) = x$  となることを示せ.

**問題 6.**  $n$  を3以上の整数とする. 円周上の  $n+1$  個の点を, 円周を  $n+1$  等分するようにとる. これらの点に0から  $n$  までの数字を1つずつ番号付けする方法を考える. 2つの番号付けは, 一方が他方を回転して得られるとき, 同じ番号付けとみなす. 番号付けが**美しい**とは,  $a < b < c < d$  かつ  $a+d = b+c$  をみたすすべての番号の組  $(a, b, c, d)$  について, 番号  $a$  が付いた点と番号  $d$  が付いた点を結ぶ弦と, 番号  $b$  が付いた点と番号  $c$  が付いた点を結ぶ弦が交わらないことをいう.

美しい番号付けの個数を  $M$  とし,  $x+y \leq n$  かつ  $x$  と  $y$  の最大公約数が1であるような正の整数の組  $(x, y)$  の個数を  $N$  とする. このとき,

$$M = N + 1$$

を示せ.