



Language: Japanese

Day: 1

2016年4月12日 火曜日

問題 1. n を正の奇数, x_1, x_2, \dots, x_n を非負実数とする. このとき,

$$\min_{i=1, \dots, n} \{x_i^2 + x_{i+1}^2\} \leq \max_{j=1, \dots, n} \{2x_j x_{j+1}\}$$

が成り立つことを示せ. ただし, $x_{n+1} = x_1$ とする.

問題 2. $ABCD$ を円に内接する四角形とし, 対角線 AC, BD の交点を X とおく. 線分 CX, DX, CD の中点をそれぞれ C_1, D_1, M とおく. 直線 AD_1, BC_1 は点 Y で交わり, 直線 MY は対角線 AC, BD とそれぞれ異なる点 E, F で交わるとする. このとき, 直線 XY は E, F, X を通る円に接することを示せ.

問題 3. m を正の整数とする. $4m \times 4m$ のマス目がある. 2つの異なるマスが仲間であるとは, 同じ行または同じ列にあることをいう. ただし, どのマスも自分自身とは仲間ではないとする. いくつかのマスに青く塗り, どのマスも少なくとも2つの青く塗られたマスと仲間であるようにしたい. 青く塗るマスの個数としてありうる最小の値を求めよ.



Language: Japanese

Day: 2

2016年4月13日 水曜日

問題 4. 半径の等しい2つの円 ω_1, ω_2 が異なる点 X_1, X_2 で交わっている. 円 ω は ω_1 と点 T_1 で外接し, ω_2 と点 T_2 で内接する. このとき, 直線 X_1T_1, X_2T_2 は ω 上の点で交わることを示せ.

問題 5. k, n は整数であり, $k \geq 2, k \leq n \leq 2k - 1$ をみたしている. $1 \times k$ または $k \times 1$ の長方形のタイルを $n \times n$ のマス目に, どのタイルも k 個の連続するマスを覆うように, またどの2つのタイルも重ならないように置いていく. これを, それ以上タイルが置けなくなるまで行う. 各 k, n に対し, それ以上タイルが置けなくなったときのタイルの枚数としてありうる最小の値を求めよ.

問題 6. S を正の整数 n であり, n^4 が $n^2 + 1, n^2 + 2, \dots, n^2 + 2n$ の中に約数をもつようなもの全体からなる集合とする. 整数 m を用いて $7m, 7m + 1, 7m + 2, 7m + 5, 7m + 6$ の形で表される S の元はそれぞれ無限個あり, $7m + 3$ または $7m + 4$ の形で表される S の元は存在しないことを示せ.