

試験時間 : 4 時間 30 分  
 問題数 : 3 問  
 配点 : 各問 7 点

©2017 著作権は数学オリンピック財団に属する。

第 1 問  $n, k$  は  $n > k$  をみたす正の整数である。A さん, B さんが次のようなゲームをしたときに, 必ず B さんが勝つことができるような最小の正の整数  $m$  を求めよ。ただし, B さんは  $n, k$  の値をゲーム開始時に知らされている。

- A さんは  $n$  桁の 2 進数  $X$  を 1 つ決め,  $X$  をちょうど  $k$  桁変えて得られるような 2 進数をすべて黒板に書く。
- B さんは黒板に書かれた数を見たうえで, ホワイトボードに  $m$  個の数を書く。
- $X$  がホワイトボードに書かれていれば B さんの勝ちである。

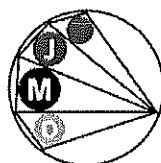
ただし,  $n$  桁の 2 進数とは, 0 または 1 が  $n$  個並んだものであるとする。たとえば, 3 桁の 2 進数は 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 の 8 個である。

第 2 問 三角形  $ABC$  は  $AB \neq AC$  をみたす。三角形  $ABC$  の外接円を  $\Gamma$  とし, 内心を  $I$  とする。  $M$  を辺  $BC$  の中点とし,  $I$  から辺  $BC$  におろした垂線の足を  $D$  とする。  $I$  を通り直線  $AI$  に垂直な直線は辺  $AB$  と辺  $AC$  にそれぞれ  $F$  と  $E$  で交わる。三角形  $AEF$  の外接円と  $\Gamma$  の交点のうち,  $A$  でない方を  $X$  とする。このとき, 直線  $XD$  と直線  $AM$  は  $\Gamma$  上で交わることを示せ。ただし,  $UV$  で線分  $UV$  の長さを表すものとする。

第 3 問 正の整数列  $a_1, a_2, \dots$  および  $r_1, r_2, \dots$  であり, 次をみたすものが存在するような正の整数  $k$  をすべて求めよ。

- $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$  が成り立つ。
- 任意の正の整数  $n$  に対して,  $a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^{r_n}$  が成り立つ。

以上



試験時間 : 4 時間 30 分  
 問題数 : 3 問  
 配点 : 各問 7 点

©2017 著作権は数学オリンピック財団に属する.

第 4 問 三角形  $ABC$  は  $AB = AC \neq BC$  をみたし,  $I$  をその内心とする. 直線  $BI$  は辺  $AC$  と  $D$  で交わり,  $D$  を通り直線  $AC$  に垂直な直線は直線  $AI$  と  $E$  で交わる. 直線  $AC$  に関して  $I$  と対称な点は三角形  $BDE$  の外接円上にあることを示せ.

ただし,  $XY$  で線分  $XY$  の長さを表すものとする.

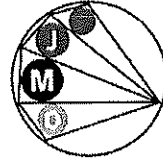
第 5 問  $n$  を 6 と互いに素な 5 以上の整数とする. 正  $n$  角形の各頂点を, どの色についてもその色で塗られた頂点が奇数個となるように, 3 色で塗り分けた. このとき, 正  $n$  角形の頂点のうち 3 つを選んでできる二等辺三角形であって, 各頂点の色がすべて異なるようなものがとれることを示せ.

第 6 問 実数に対して定義され実数値をとる関数  $f$  であって,  $f(0) \neq 0$  をみたし, かつ任意の実数  $x, y$  に対して

$$f(x+y)^2 = 2f(x)f(y) + \max\{f(x^2) + f(y^2), f(x^2 + y^2)\}$$

が成り立つようなものをすべて求めよ.

以 上



試験時間 : 4 時間 30 分  
 問題数 : 3 問  
 配点 : 各問 7 点

©2017 著作権は数学オリンピック財団に属する.

第 7 問  $n^4 + 10n^2 + 2^k$  が平方数となるような, 正の整数の組  $(n, k)$  をすべて求めよ.

第 8 問 正の整数からなる数列  $a_1, a_2, \dots$  があり, 任意の正の整数  $n$  について

$$a_n > \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n}}{n + 2016}$$

をみたしている. このとき, ある正の実数  $C$  が存在し, 任意の正の整数  $n$  について  $a_n < C$  が成り立つことを示せ.

第 9 問  $n$  を 3 以上の整数とする. ある国には  $n$  個の島がある. はじめ, IMO 社は異なる 2 つの島の組のうちいくつかの間に双方向のフェリーを運航させており, どの異なる 2 つの島の間もいくつかのフェリーを乗り継いで行き来することができるようになっている.

これから毎年のはじめに, IMO 社はその年開通させるフェリー路線を次のように前年から変更して決めていくことになった:

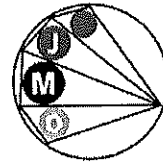
- (1) その間で前の年にフェリーが運航していたような 2 つの異なる島  $X, Y$  を選ぶ.
- (2)  $X$  と  $Y$  の間のフェリーは運休する.
- (3) 前の年  $X$  と  $Y$  のちょうど片方との間にフェリーが運航していたような  $X, Y$  以外の島については, 新たにもう片方との間にもフェリーを運航させることにする.
- (4) これ以外に新たにフェリーを運航または運休することはない.

ただし, (1) の島  $X, Y$  の選び方については, 次のような条件を設けることになった.

条件: どの 1 個以上  $n - 1$  個以下の島の集合  $S$  に対しても, どの時点からみても, その先少なくとも 1 回は  $X, Y$  の片方は  $S$  に含まれもう片方は  $S$  に含まれないように選ぶ.

このとき, ある年とある島が存在し, その年にその島と他のすべての島との間にフェリーが運航していることを示せ.

以上



試験時間 : 4 時間 30 分  
 問題数 : 3 問  
 配点 : 各問 7 点

©2017 著作権は数学オリンピック財団に属する。

第 10 問 3 以上の正の整数  $n$  であり, 次をみたすものをすべて求めよ.

$|a_k| + |b_k| = 1$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) をみたすような任意の  $2n$  個の実数  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  に対して, 実数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  を次をみたすように選ぶことができる.

$$|x_k| = 1 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad \left| \sum_{k=1}^n x_k a_k \right| + \left| \sum_{k=1}^n x_k b_k \right| \leq 1.$$

第 11 問 正の整数に対して定義され, 正の整数値をとる関数  $f$  であって, 任意の正の整数  $m, n$  に対して,  $f(m) + f(n) - mn \neq 0$  かつ  $\frac{mf(m) + nf(n)}{f(m) + f(n) - mn}$  が整数であるようなものをすべて求めよ.

第 12 問 凸四角形  $ABCD$  は,  $\angle ABC = \angle ADC < 90^\circ$  をみたす.  $\angle ABC$  と  $\angle ADC$  の二等分線は直線  $AC$  とそれぞれ異なる点  $E, F$  で交わり, 互いに点  $P$  で交わる.  $M$  を線分  $AC$  の中点とし,  $\omega$  を三角形  $BPD$  の外接円とする. 線分  $BM$  と  $\omega$  が  $B$  でない点  $X$  で交わり, 線分  $DM$  と  $\omega$  が  $D$  でない点  $Y$  で交わっているとする. 直線  $XE$  と直線  $YF$  が点  $Q$  で交わっているとき, 直線  $PQ$  と直線  $AC$  が垂直に交わることを示せ.

以上