

# 2021年アジア太平洋数学オリンピック

(公財) 数学オリンピック財団

## 問題<sup>1</sup>

2021年3月9日 試験時間4時間5題 各問7点

1.  $r$  を2より大きい実数とする. 正の実数  $x$  であって  $x^2 = r[x]$  をみたすものは2個または3個であることを示せ. ただし, 実数  $r$  に対して  $r$  を超えない最大の整数を  $[r]$  で表す.
2. 多項式  $P$  と正の整数  $n$  について,  $P_n$  を  $a < b \leq n$  をみたす正の整数の組  $(a, b)$  であって  $|P(a)| \mid |P(b)|$  が  $n$  で割りきれられるようなものの個数とする. 任意の  $n$  について  $P_n \leq 2021$  となるような整数係数多項式  $P$  をすべて求めよ.
3. 円に内接する凸四角形  $ABCD$  があり, その外接円を  $\Gamma$  とする. 点  $E$  を対角線  $AC, BD$  の交点とし, 点  $L$  を辺  $AB, BC, CD$  に接する円の中心とし, 点  $M$  を  $\Gamma$  の弧  $BC$  であって  $A$  と  $D$  を含まない方の中点とする. 三角形  $BCE$  の角  $E$  内の傍心は直線  $LM$  上にあることを示せ.  
ただし, 三角形  $BCE$  の角  $E$  内の傍心とは, 線分  $BC$ , 半直線  $EB$ , 半直線  $EC$  に接する円のうち, 内接円でないものの中心をさす.
4.  $32 \times 32$  のマス目があり, ネズミが左下のマスにいて盤面の上端の方向を向いている. 左下以外のいくつかのマスを指定して1マスに1つずつチーズの塊<sup>かたまり</sup>を置くことを考える. 置かれた後, ネズミは盤面の外に出るまで次の動きを繰り返す.  
まっすぐ進み, チーズのあるマスに着いたら, チーズの塊を齧<sup>かじ</sup>って今までの進行方向から右に90度回る. 盤面の端に着いたら盤面から落ちる.  
このようにネズミが動いたとき, どのチーズの塊もちょうど1回ずつ齧った上でネズミが盤面から落ちるとき, チーズの置き方を良い置き方ということにする.  
(a) ちょうど888個のチーズの塊を用いる良い置き方は存在しないことを示せ.  
(b) 666個以上のチーズの塊を用いる良い置き方が存在することを示せ.
5. 整数に対して定義され整数値をとる関数  $f$  であって, 次の条件をみたすものをすべて求めよ.  
任意の整数  $a, b$  に対して  $f(f(a) - b) + bf(2a)$  が平方数となる.

以上

<sup>1</sup>Copyright ©2021 by Mathematical Olympiad Foundation of Japan.  
著作権は数学オリンピック財団に帰属します.