

2023 年 4 月 15 日 土曜日

問題 1. $n \geq 3$ 個の正の実数 a_1, a_2, \dots, a_n がある. 1 以上 n 以下の自然数 i について, 実数 b_i を $b_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$ で定める. ただし, $a_0 = a_n, a_{n+1} = a_1$ とする.

1 以上 n 以下の整数 i, j について, $a_i \leq a_j$ となることと $b_i \leq b_j$ となることが同値になっているとする. このとき, $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ となることを示せ.

問題 2. 鋭角三角形 ABC がある. D を三角形 ABC の外接円上の点であって, AD が直径になるようなものとする. 点 K, L はそれぞれ線分 AB, AC 上の点であり, 直線 DK, DL は三角形 AKL の外接円に接しているとする.

このとき, 直線 KL は三角形 ABC の垂心を通ることを示せ.

ただし, 垂心とは三角形の各頂点から対辺におろした垂線 3 本の交点である.

問題 3. k を正の整数とする. レクシーは, 文字 A, B のみからなる k 文字の文字列いくつかからなる辞書 D を持っている. レクシーは, $k \times k$ のマス目の各マスに A, B のいずれかを書き込むことで, 各縦列を上から下に読むことで得られる文字列, 各横列を左から右に読むことで得られる文字列がすべて D に含まれているようにしたい.

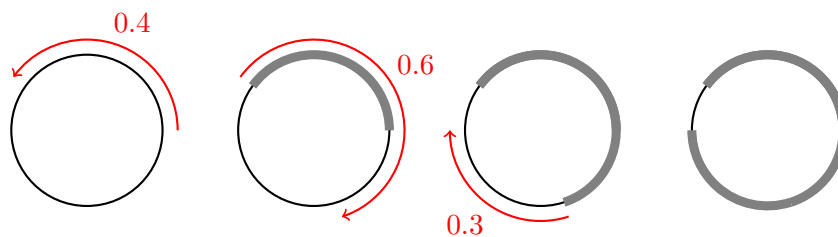
このとき, 以下の条件をみたす整数 m としてありうる最小のものを求めよ.

D に少なくとも m 個の文字列が含まれていれば, D に含まれている文字列にかかわらず, レクシーは上記の条件をみたすようにマス目を文字で埋めることができる.

2023 年 4 月 16 日 日曜日

問題 4. かたつむりのターボ君が, 周の長さが 1 の円周上のある 1 点にいる. 正の実数からなる無限数列 c_1, c_2, c_3, \dots が与えられたとき, ターボ君は, 円周に沿って順に c_1, c_2, c_3, \dots の距離を移動する. ただし, 各移動においてターボ君は時計回りまたは反時計回りのどちらに動くかを定めることができる.

例えば, 数列 c_1, c_2, c_3, \dots として $0.4, 0.6, 0.3, \dots$ が与えられたとき, ターボ君の移動の例として以下の図のようなものが考えられる.



このとき, 以下の条件をみたす正の実数 C の最大値を求めよ.

各項が C より小さい実数からなるどのような正の実数列 c_1, c_2, c_3, \dots が与えられたとしても, ターボ君は上手く行動することで, 円周上にターボ君が一度も訪れない点が存在するようにできる.

問題 5. 正の整数 $s \geq 2$ が与えられている. 正の整数 k について, そのひねり k' を次のように定義する: $b < s$ なる非負整数 a, b を用いて k を $as + b$ と表示したとき, $k' = bs + a$ とする. 正の整数 n に対し, 無限数列 d_1, d_2, \dots であって, $d_1 = n$ かつ正の整数 i について d_{i+1} が d_i のひねりであるようなものを考える.

この数列の何番目かの項が 1 になるための必要十分条件は, n を $s^2 - 1$ で割った余りが 1 または s であることを示せ.

問題 6. 三角形 ABC があり, その外接円を Ω とする. 点 S_b, S_c を, それぞれ B を含まない弧 AC , C を含まない弧 AB の中点とする. 点 N_a を, 弧 BAC (A を含む弧 BC) の中点とする. 点 I を三角形 ABC の内心とする. ω_b を直線 AB に接し Ω に S_b で内接する円とし, ω_c を直線 AC に接し Ω に S_c で内接する円とする. このとき, 直線 IN_a と, ω_b と ω_c の 2 交点を通る直線は, Ω 上に共有点を持つことを示せ.

三角形の内心とは, その三角形の内接円, つまりその三角形の内部にあり, 3 辺すべてに接するような円の中心のことである.