2024年アジア太平洋数学オリンピック

(公財) 数学オリンピック財団

問　　題[*1]

2024 年 3 月 12 日 試験時間 4 時間 5 題

1. 鋭角三角形 ABC の辺 AB, AC 上にそれぞれ点 D, E があり, 直線 DE は辺 BC に平行である. 四角形 $BCED$ の内部 (周上を含まない) に点 X があり, 半直線 DX, EX が辺 BC (端点を除く) とそれぞれ点 P, Q で交わっている. 三角形 BQX の外接円と三角形 CPX の外接円が X でない点 Y で交わっているとき, 3 点 A, X, Y は同一直線上にあることを示せ.

2. k を 51 以上 99 以下の整数とする. 100×100 のマス目があり, 1 以上 100 以下の整数 a, b について, 上から a 行目, 左から b 列目のマスを (a, b) で表す. **k-ナイト**とよばれる駒が 1 つあり, マス $(1, 1)$ から出発して有限回の移動をする. ここで, マス (a, b) に位置する k-ナイトは 1 回の移動で, 組 $(|a-c|, |b-d|)$ が $(1, k)$ または $(k, 1)$ と等しいようなマス (c, d) に移動できる. **経路**とは, マスの列 $(x_0, y_0) = (1, 1), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ であって, 各 $i = 1, 2, \ldots, n$ について k-ナイトがマス (x_{i-1}, y_{i-1}) からマス (x_i, y_i) へ 1 回で移動できるものをいう. また, ある経路に含まれるようなマスは**到達可能**であるという. 各 k に対し, 到達可能なマスの個数 $L(k)$ を求めよ.

3. n を正の整数とし, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ を正の実数とするとき,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \left(\frac{2}{1+a_i} \right)^{2^i} \geqq \frac{2}{1 + a_1 a_2 \cdots a_n} - \frac{1}{2^n}$$

が成り立つことを示せ.

4. t を正の整数とする. $0, 1, \ldots, t-1$ の並べ替え $a_0, a_1, \ldots, a_{t-1}$ であって, 任意の 0 以上 $t-1$ 以下の整数 i について $2a_i \neq t+i$ かつ ${}_{t+i}\mathrm{C}_{2a_i}$ が奇数であるようなものがちょうど 1 つ存在することを示せ. ただし, $0, 1, \ldots, t-1$ の並べ替えとは, 0 以上 $t-1$ 以下の整数がちょうど 1 回ずつ現れる長さ t の数列である. また, 正の整数 m, n が $m < n$ をみたすとき, ${}_m\mathrm{C}_n = 0$ と定める.

5. 円に内接する四角形 $ABCD$ と直線 ℓ があり, ℓ は辺 BC, AD とそれぞれ点 R, S で交わっている. また, ℓ は線分 BA の A 側の延長線と点 P で, 線分 DC の C 側の延長線と点 Q で交わっている. 三角形 PAS の外接円と三角形 PBR の外接円が P でない点 M で交わっており, 三角形 QCR の外接円と三角形 QDS の外接円が Q でない点 N で交わっている. 直線 MP と直線 NQ が点 X で, 直線 AB と直線 CD が点 K で, 直線 BC と直線 AD が点 L で交わっているとき, X は直線 KL 上にあることを示せ.

以上