火曜日, *16. 7* 月 *2024*

問題 1.　実数 α であって, 任意の正の整数 n に対して

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

が n の倍数となるようなものをすべて求めよ. (ただし, 実数 z に対して z 以下の最大の整数を $\lfloor z \rfloor$ で表す. 例えば, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$, $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$ である.)

問題 2.　正の整数の組 (a, b) であって, 次をみたす正の整数 g と N が存在するようなものをすべて求めよ.

任意の整数 $n \geqq N$ について $\gcd(a^n + b, b^n + a) = g$ が成り立つ.

(ただし, 正の整数 x, y に対し, x と y の最大公約数を $\gcd(x, y)$ で表す.)

問題 3.　正の整数からなる数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ と正の整数 N があり, 任意の整数 $n > N$ について, a_n は a_{n-1} が $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ に現れる回数に等しい. このとき, $a_1, a_3, a_5, \ldots$ または $a_2, a_4, a_6, \ldots$ が十分先で周期的であることを示せ.

(ただし, 数列 $b_1, b_2, b_3, \ldots$ が「十分先で周期的である」とは正の整数 p と M であって, 任意の整数 $m \geqq M$ について $b_{m+p} = b_m$ となるものが存在することである.)

Language: Japanese

時間: *4* 時間 *30* 分
各問題は *7* 点満点です.

水曜日, *17. 7 月 2024*

問題 **4.** $AB < AC < BC$ をみたす三角形 ABC において，その内心と内接円をそれぞれ I, ω とおく．直線 BC 上の C と異なる点 X を，X を通り直線 AC に平行な直線が ω に接するようにとる．同様に，直線 BC 上の B と異なる点 Y を，Y を通り直線 AB に平行な直線が ω に接するようにとる．直線 AI と三角形 ABC の外接円の交点のうち A でない方を P とする．辺 AC, AB の中点をそれぞれ K, L とおく．このとき，$\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$ が成り立つことを示せ．

問題 **5.** かたつむりのターボ君は 2024 行 2023 列からなるマス目においてゲームを行う．2022 個のマスにモンスターが潜んでいる．最初，ターボ君はモンスターがどこに潜んでいるかを知らないが，モンスターが 1 行目と 2024 行目を除く各行にちょうど 1 体ずつ潜んでおり，どの列についても潜んでいるモンスターは高々 1 体であることはわかっている．

ターボ君は 1 行目から 2024 行目まで移動する挑戦を何回か行う．各挑戦の内容は以下の通りである：

> まず，ターボ君は開始地点となるマスを 1 行目から選ぶ．そして，今いるマスと辺を共有して隣り合うマスに移動することを繰り返す．(既に訪れたマスに再び移動してもよい.) 移動したマスにモンスターが潜んでいると，その挑戦は失敗となり 1 行目に戻され次の挑戦が始まる．2024 行目のいずれかのマスに到達すれば挑戦は成功となり，ゲームを終了する．

ただし，モンスターは動かず，またターボ君は既に訪れたマスがモンスターの潜んでいるマスかどうかを覚えているとする．

モンスターの配置によらず，ターボ君が n 回以内の挑戦で 2024 行目に到達する戦略があるような n としてありうる最小の値を求めよ．

問題 **6.** $\mathbb{Q}$ を有理数全体からなる集合とする．関数 $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ が「麗しい」とは，任意の有理数 x, y について

$$「\quad f(x+f(y)) = f(x)+y \qquad \text{または} \qquad f(f(x)+y) = x+f(y) \quad 」$$

が成立することである．次の条件をみたす整数 c が存在することを示し，そのような c としてありうる最小の値を求めよ．

> 任意の麗しい関数 f について，有理数 r を用いて $f(r)+f(-r)$ と表せる有理数は高々 c 種類である．

Language: Japanese

時間: *4* 時間 *30* 分
各問題は *7* 点満点です．