2025 年 4 月 13 日 日曜日

問題 1. 以下の条件をみたす 3 以上の整数 N をすべて求めよ.

> N と互いに素な N 未満のすべての正の整数を小さい順に $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ とするとき, 1 以上 $m-1$ 以下の任意の整数 i について,
>
> $$\gcd(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$
>
> が成り立つ.

ただし, 正の整数 a, b に対し, a と b の最大公約数を $\gcd(a, b)$ で表す.

問題 2. 正の整数からなる狭義単調増加な数列 $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ が**中心的**であるとは, 任意の正の整数 n に対し, この数列の初項から第 a_n 項までの a_n 個の項の平均が a_n に等しいことをいう. このとき, 以下の条件をみたす正の整数列 $b_1, b_2, b_3, \ldots$ が存在することを示せ.

> どの中心的な数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ に対しても, 正の整数 n であって $a_n = b_n$ となるものが無限個存在する.

問題 3. 鋭角三角形 ABC の辺 BC 上に点 D, E を, 4 点 B, D, E, C がこの順に並び, さらに $BD = DE = EC$ をみたすようにとる. 線分 AD, AE の中点をそれぞれ M, N とする. 三角形 ADE が鋭角三角形であると仮定し, その垂心を H とする. 直線 BM, CN 上にそれぞれ点 P, Q をとると, D, H, M, P は同一円周上にある相異なる 4 点であり, E, H, N, Q もまた同一円周上にある相異なる 4 点であった. このとき, 4 点 P, Q, N, M は同一円周上にあることを示せ.

EGMO 2025
European Girls' Mathematical Olympiad
KOSOVA

Language: **Japanese**

Day: 2

2025 年 4 月 14 日 月曜日

問題 4. $AB \neq AC$ をみたす鋭角三角形 ABC の内心を I とする．三角形 ABC の外接円と直線 BI の交点のうち B でない方を P とし，三角形 ABC の外接円と直線 CI の交点のうち C でない方を Q とする．2 点 R, S を，四角形 $AQRB$ および $ACSP$ がともに平行四辺形となるようにとる (すなわち，4 組の 2 直線 AQ と RB, AB と QR, AC と SP, AP と CS がいずれも平行となるようにとる)．直線 RB と SC の交点を T とするとき，4 点 R, S, T, I は同一円周上にあることを示せ．

問題 5. n を 1 より大きい整数とする．$n \times n$ のマス目であって，n^2 個のマスそれぞれに上下左右のいずれかを向いた矢印を書き込んだものを**初期配置**とよぶ．かたつむりのターボちゃんは，初期配置のいずれかのマスから出発し，以下の規則に従って $n \times n$ のマス目を移動する．

> ターボちゃんは，現在いるマスに書かれた矢印の方向に 1 マス進む (ただし，$n \times n$ のマス目の外に出ることもある)．その後，すべてのマスに書かれた矢印が反時計回りに 90° 回転する．

初期配置におけるあるマスが**良いマス**であるとは，そのマスから出発してターボちゃんが移動を繰り返すとき，$n \times n$ のマス目の外に一度も出ることなく，すべてのマスを一度ずつ通って元のマスに戻ってくることをいう．ありうるすべての初期配置を考えるとき，良いマスの個数としてありうる最大の値を n を用いて表せ．

問題 6. 2025×2025 のマス目の各マスに非負実数が書かれており，どの行に書かれた実数の総和も 1 であり，どの列に書かれた実数の総和も 1 である．1 以上 2025 以下の整数 i に対し，上から i 行目の 2025 マスに書かれた実数のうち最大のものを r_i とし，$R = r_1 + r_2 + \cdots + r_{2025}$ とおく．さらに，1 以上 2025 以下の整数 i に対し，左から i 列目の 2025 マスに書かれた実数のうち最大のものを c_i とし，$C = c_1 + c_2 + \cdots + c_{2025}$ とおく．このとき，$\dfrac{R}{C}$ としてありうる最大の値を求めよ．

時間：4 時間 30 分
各問 7 点