2025年ヨーロッパ女子数学オリンピック
日本代表一次選抜試験

(公財) 数学オリンピック財団

問　　題[*1]

2024年11月24日 試験時間4時間5題

1. a, b, c, d を相異なる正の実数とする.

$$a,\quad b,\quad c,\quad d,\quad a+b,\quad a+c,\quad a+d,\quad b+c,\quad b+d,\quad c+d,$$
$$a+b+c,\quad a+b+d,\quad a+c+d,\quad b+c+d,\quad a+b+c+d$$

の中に現れる実数はちょうど k 種類であった. このとき, k としてありうる最小の値を求めよ.

2. $AB < AC$ および $\angle BAC = 60^\circ$ をみたす鋭角三角形 ABC があり, その垂心を H とする. $\angle BHC$ の二等分線と辺 BC の交点を P とし, 辺 BC の垂直二等分線と三角形 ABC の外接円の交点のうち, 直線 BC に対して A と同じ側にあるものを M, 反対側にあるものを N とする. このとき4点 H, M, N, P は同一円周上にあることを示せ.

ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.

3. $n = \phi(n) + 2\phi\big(\phi(n)\big)$ をみたす正の整数 n をすべて求めよ.

ただし, n と互いに素な1以上 n 以下の整数の個数を $\phi(n)$ で表す.

4. 2025個の箱 $1, 2, \ldots, 2025$ があり, 1以上2025以下の各整数 i に対して, はじめ箱 i には 2^{i-1} 個の石が入っている. ここで, 以下の操作を繰り返す.

> 2以上の整数 n と, $1 \leqq a_1 < a_2 < \cdots < a_n \leqq 2025$ をみたす整数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ であって, 任意の2以上 n 以下の整数 i に対して箱 a_i に石が1つ以上入っているようなものを選ぶ. 箱 a_1 に1つ石を入れ, 2以上 n 以下の各整数 i に対し, 箱 a_i から1つずつ石を取り除く.

箱1以外のどの箱にも石が入っていない状態になったとき操作を終了する. 操作が終了したときに箱1に入っている石の個数としてありうる最小の値を求めよ.

5. 実数に対して定義され実数値をとる関数 f であって, 任意の実数 x, y に対して

$$f(x)f\bigl(f(x)+y\bigr)=f(x)^2+[x][y]$$

が成り立つようなものをすべて求めよ. ただし, 実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す. たとえば, $[3.14]=3$, $[5]=5$, $[-2.71]=-3$ である.

以上