2025年
第23回 日本ジュニア数学オリンピック
本 選 問 題

受験生への注意事項(こう)

試験開始の指示のあるまで, 問題は見ないこと.

分度器・電卓(たく)・パソコン・携(けい)帯電話, またノートや参考書等の使用は厳禁です.

携帯電話等の電源は切っておくこと.

問題は 5 問, 試験時間は 4 時間, 解答用紙は 5 枚 (各問題につき 1 枚) です.

配点は各問 8 点, 合計 40 点です.

証明が完結していない場合でも部分点を与(あた)えることがあります.

解答用紙の裏面を用いるときは「裏面につづく」と記入すること.

解答用紙の追加はできません.

5 枚の解答用紙の記入欄(らん)の各々(おのおの)に, 受験番号・氏名を記入すること.

解答用紙への記入に使用できる筆記用具は鉛筆, シャープペンシル, ボールペン (色つき可) です.

解答用紙だけを回収します.

2025 年 2 月 11 日

(公財) 数学オリンピック財団

2025年日本ジュニア数学オリンピック本選

(公財) 数学オリンピック財団

問　　題[*1]

2025年2月11日 試験時間4時間5題

1. xy 平面において, x 座標と y 座標がともに1以上2025以下の整数である点を**良い点**とよぶ. いくつかの良い点に印をつけ, 次の操作を何回か行った.

> 印のついた相異(あい)なる2つの良い点 (以前の操作で選ばれていてもよい) であって, x 座標どうしまたは y 座標どうしが等しいようなものを選び, それら2点を端点(たん)とする線分を描(か)く.

操作の結果, 印のついていないすべての良い点は, 操作で描いた線分のうち少なくとも1本の上にあった. 印のついた良い点の個数としてありうる最小の値を求めよ.

2. 次の条件をすべてみたすように, 正2025角形の各頂点に1つずつ実数を書き込(こ)む方法が存在するような実数 r をすべて求めよ.

- r が書き込まれた頂点が存在する.
- どの隣(とな)りあう2頂点についても, それらに書き込まれた数の和または積が1となる.

3. 平行四辺形 $ABCD$ の対角線 AC 上 (端点を除く) に点 E がある. 三角形 ABE の外接円と辺 AD (端点を除く) が点 P で交わり, 三角形 ADE の外接円と辺 AB (端点を除く) が点 Q で交わった. 直線 CD に関して P と対称(しょう)な点を P', 直線 BC に関して Q と対称な点を Q' とするとき, $PQ' = P'Q$ が成り立つことを示せ. ただし, XY で線分 XY の長さを表す.

4. p を3以上の素数, n を4以上の整数とし, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ を正の整数とする. 1以上 $n-1$ 以下のどの整数 i についても $a_1a_2\cdots a_i + a_{i+1}a_{i+2}\cdots a_n$ が p べきであるとき, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ のうち少なくとも $n-3$ 個は1であることを示せ.

ただし, p べきとは非負整数 m を用いて p^m の形で表される整数である. また, $p^0 = 1$ である.

---

5. m を正の整数, n を 2 以上の整数とする. n 枚の紙 $1, 2, \ldots, n$ があり, それぞれの紙には m 個の相異なる実数が書かれている. ただし, 相異なる紙には同じ実数が書かれていてもよい. このとき, 整数 i と実数 s, t からなる組 (i, s, t) であって, 以下の条件をすべてみたすものが少なくとも m^2 個存在することを示せ.

- $1 \leqq i \leqq n$.
- s は紙 i に書かれており, t は紙 $i+1$ に書かれている.
- $s \leqq t$.

ただし, 紙 $n+1$ は紙 1 を表すものとする.

以上