2025年

第23回 日本ジュニア数学オリンピック

予 選 問 題

受験生への注意事項

試験開始の指示のあるまで, 問題は見ないこと.

分度器・電卓・パソコン・携帯電話, またノートや参考書等の使用は厳禁です.

携帯電話等の電源は切っておくこと.

問題は 12 問, 試験時間は 3 時間です.

配点は各問 1 点, 合計 12 点です.

受験番号・氏名を別紙の解答用紙に記入すること.

解答は答のみを解答用紙の該当欄に記入すること.

解答用紙だけを回収します.

2025 年 1 月 13 日

(公財) 数学オリンピック財団

2025年日本ジュニア数学オリンピック予選

(公財) 数学オリンピック財団

問　題[*1]

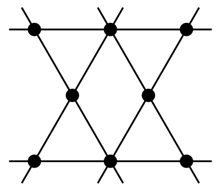
2025年1月13日 試験時間3時間12題 (答のみを記入する)

1. 正の整数 m, n が $m+n=2025$ をみたすとき, m と n の最大公約数としてありうる最大の値を求めよ.

2. 図のように6本の直線と ● で示された8個の点がある. 各点に相異なるとは限らない正の整数を1つずつ割り当てる方法であって, 次をみたすものは何通りあるか.

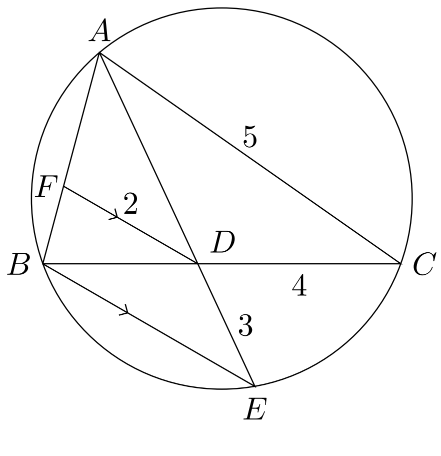
> 6本の直線のいずれについても, その上にある3点に割り当てられた数の和が10である.

ただし, 回転や裏返しにより一致する割り当て方も異なるものとして数える.

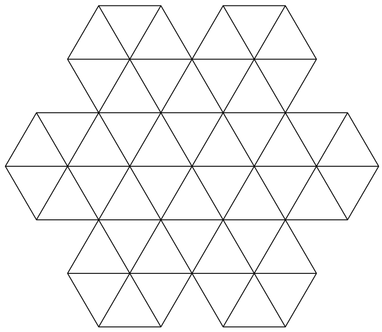


3. $AC=5$ をみたす三角形 ABC があり, 辺 BC (端点を除く) 上に $CD=4$ をみたす点 D がある. 三角形 ABC の外接円と直線 AD の交点のうち A でない方を E とし, D を通り直線 BE に平行な直線と辺 AB の交点を F とする. $DE=3$, $DF=2$ のとき, 線分 BD の長さを求めよ.

ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.



4. 一辺の長さが 1 の正三角形 48 個からなる図のような盤(ばん)面がある．この盤面に, 一辺の長さが 1 の正六角形のタイル 6 枚をマス目にそって重ならないように置く方法は何通りあるか．
ただし, 盤面を回転したり裏返したりして一致する置き方も異なるものとして数える．



5. はじめ石が 50^{25} 個入っている箱が 1 つある．次の操作を繰(く)り返し行うことを考える．

> 石が 1 つ以上入っている箱すべてから石を 1 つずつ取り出す．その後, 新しい空の箱を用意し, 取り出した石をすべて入れる．

50^{25} 回目の操作が終わったとき, 石が 1 つ以上入っている箱は何個あるか．

6. 1 以上 80000 以下の整数の組 (a, b, c) であって, $a + b^2 + c^3 = b(c+1)^2$ および $2b = a + c$ をみたすものはいくつあるか．

7. 三角形 ABC の辺 BC, CA, AB 上 (端点を除く) にそれぞれ点 D, E, F があり, 線分 BE と線分 CF が点 P で交わっている．三角形 AFD, FPD, PED, EAD の面積がそれぞれ 10, 7, 5, 13 であるとき, $\dfrac{BD}{DC}$ の値を求めよ．ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする．

8. n を 5 以上の整数とする．n 枚のカードに整数が 1 つずつ書き込(こ)まれており, 以下をみたしている．

> どのように 1 枚以上 $n-4$ 枚以下のカードを選んでも, 選んだカードに書き込まれた整数の平均値は整数となる．

このとき, 整数の書き込まれ方によらず以下が成り立つような n のうち, 最も小さいものを求めよ．

> どのように $n-3$ 枚以上 n 枚以下のカードを選んでも, 選んだカードに書き込まれた整数の平均値は整数となる．

9. 円に内接する四角形 $ABCD$ があり, $AB = 7$, $BC = 6$ をみたしており, 辺 CD (端点を除く) 上の点 E が $BE = 9$ をみたしている．また, 直線 BE と直線 AD は点 F で交わり, 3 点 A, D, F はこの順に並んだ．$AF = 11$, $DF : DE = 7 : 6$ のとき, 線分 CD の長さを求めよ．
ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする．

10. 30×30 のマス目があり, このうち 30 個のマスを黒く塗ったところ, 各行, 各列に黒く塗られたマスはちょうど 1 つずつであり, 左上隅の 1 マスは黒く塗られていた. また, 4 以上の整数 n および相異なる n 個のマス $W_1, W_2, \ldots, W_n$ であって, 以下の条件をすべてみたすようなものは存在しなかった.

- $W_1, W_2, \ldots, W_n$ はいずれも黒く塗られていない.
- 任意の 1 以上 n 以下の整数 i に対し, W_i と W_{i+1} は辺を共有して隣りあう. ただし, W_{n+1} は W_1 を表すものとする.
- 1 以上 n 以下の整数 i について, W_i の中心を C_i とするとき, $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, C_n, C_1$ をこの順に結んで得られる折れ線の内側に黒く塗られたマスが存在する.

このとき, マスの塗り方としてありうるものは何通りあるか.
ただし, 回転や裏返しで一致するような塗り方も区別して数える.

11. $a_1, a_2, \ldots, a_7$ を正の整数とする. A さんと B さんが問題番号 $1, 2, \ldots, 7$ の全 7 問からなる試験を受けることを考える. 1 以上 7 以下の整数 i について, 問題番号 i の問題を正解した場合 a_i 点が与えられ, 正解しなかった場合は 0 点が与えられる. A さんと B さんの正解した問題によらず, 次の条件がともに成り立った.

- A さんの正解した問題数が B さんの正解した問題数より多いとき, A さんの総得点は B さんの総得点より大きい.
- A さんの正解した問題数と B さんの正解した問題数が等しく, かつ A さんと B さんのちょうど一方のみが正解した問題が存在するとき, そのうち最も問題番号の大きいものを正解したのが A さんであるならば, A さんの総得点は B さんの総得点より大きい.

このとき, a_7 としてありうる最小の値を求めよ.

12. 1003 人の囲碁棋士が囲碁の大会に参加した. この大会では, どの棋士も自分以外の 1002 人の棋士と 1 回ずつ対局をし, そのうち 1000 人との対局では勝敗が決まり, 残りの 2 人との対局では引き分けだった.
3 人以上の棋士からなるグループが**良いグループ**であるとは, 次をみたすことをいう.

> グループに属する棋士全員が内側を向いて適切な順番で円形に並ぶことで, どの棋士も右隣の棋士に勝っているようにできる.

どの棋士も 1 つ以上の良いグループに属するとき, 良いグループの個数としてありうる最小の値を m とする. どの棋士も 1 つ以上の良いグループに属し, 良いグループがちょうど m 個となるような対局結果の組み合わせとしてありうるものの総数を N とするとき, $\dfrac{N}{1003!}$ の値を求めよ.
ただし, $1003! = 1 \times 2 \times \cdots \times 1003$ である.

以上

第23回日本ジュニア数学オリンピック予選

解答用紙

受験番号					
氏名					

1	2	3
675	36通り	$\frac{18}{7}$

4	5	6
24通り	$10 \cdot 50^{12} - 1$個	80197個

7	8	9
$\frac{5}{6}$	36	$\frac{63}{8}$

10	11	12
1136通り	62	$\frac{1206}{5^{197}}$

受験番号					
会場内通し番号					

合計点