2025年
第35回 日本数学オリンピック
本選問題

受験生への注意事項

試験開始の指示のあるまで, 問題は見ないこと.

分度器・電卓・パソコン・携帯電話, またノートや参考書等の使用は厳禁です.

携帯電話等の電源は切っておくこと.

問題は 5 問, 試験時間は 4 時間, 解答用紙は 5 枚 (各問題につき 1 枚) です.

配点は各問 8 点, 合計 40 点です.

証明が完結していない場合でも部分点を与えることがあります.

解答用紙の裏面を用いるときは「裏面につづく」と記入すること.

解答用紙の追加はできません.

5 枚の解答用紙の記入欄の各々(おのおの)に, 受験番号・氏名を記入すること.

解答用紙への記入に使用できる筆記用具は鉛筆, シャープペンシル, ボールペン (色つき可) です.

解答用紙だけを回収します.

2025 年 2 月 11 日

(公財) 数学オリンピック財団

2025年日本数学オリンピック本選

(公財) 数学オリンピック財団

問　　題[*1]

2025年2月11日 試験時間4時間5題

1. n を2以上の整数とする．実数 $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ が，任意の1以上 n 以下の整数 k に対して $|a_k - a_{n+k}| \geqq 1$ をみたすとき，

$$(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})^2 + (a_{2n} - a_1)^2$$

のとりうる最小の値を求めよ．

2. 鋭角三角形 ABC があり，その外心を O とする．また，三角形 ABO, ACO の外心をそれぞれ O_1, O_2 とする．三角形 AO_1O_2 の外接円と辺 BC (端点を除く) が相異なる2点 P, Q で交わっており，4点 B, P, Q, C はこの順に並んでいた．三角形 OPQ の外心を O_3 とするとき，3点 A, O, O_3 が同一直線上にあることを示せ．

3. n を正の整数とする．1以上100以下の整数の組 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_n, y_n, z_n)$ が次の条件をみたした．

> 1以上100以下の整数からなる任意の数列 $a_1, a_2, \ldots$ に対し，正の整数 i と1以上 n 以下の整数 j であって，$(a_i, a_{i+1}, a_{i+2}) = (x_j, y_j, z_j)$ をみたすものが存在する．

このとき，n としてありうる最小の値を求めよ．

4. 整数係数多項式 $f(x)$ であって，任意の2以上の整数 n に対して次の条件をともにみたすものをすべて求めよ．

- $f(n) > 0$ が成り立つ．
- $f(n)$ は $n^{f(n)} - 1$ を割りきる．

5. 二等辺三角形でない鋭角三角形 ABC の内部に相異なる 3 点 A_1, B_1, C_1 があり, $AB_1 : CB_1 = AB : CB$ および $AC_1 : BC_1 = AC : BC$ をみたしている. 直線 BC に関して A_1 と対称な点を A_2, 直線 AC に関して B_1 と対称な点を B_2, 直線 AB に関して C_1 と対称な点を C_2 とすると, 次の条件をすべてみたした.

- 4 点 A, A_2, B, C_2 は同一円周上にある.
- 4 点 A, A_2, B_2, C は同一円周上にある.
- 4 点 B, B_2, C, C_2 は同一円周上にある.
- 3 点 A_2, B_2, C_2 はいずれも三角形 ABC の外接円上にない.

このとき, 三角形 $A_1B_1C_1$ と三角形 $A_2B_2C_2$ は相似であることを示せ.

ただし, XY で線分 XY の長さを表す.

以上