2 0 2 5 年
第 35 回 日本数学オリンピック
予 選 問 題

受験生への注意事項

試験開始の指示のあるまで, 問題は見ないこと.

分度器・電卓・パソコン・携帯電話, またノートや参考書等の使用は厳禁です.

携帯電話等の電源は切っておくこと.

問題は 12 問, 試験時間は 3 時間です.

配点は各問 1 点, 合計 12 点です.

受験番号・氏名を別紙の解答用紙に記入すること.

解答は答のみを解答用紙の該当欄に記入すること.

解答用紙への記入に使用できる筆記用具は鉛筆, シャープペンシル, ボールペン (色つき可) です.

解答用紙だけを回収します.

2025 年 1 月 13 日

(公財) 数学オリンピック財団

2025年日本数学オリンピック予選

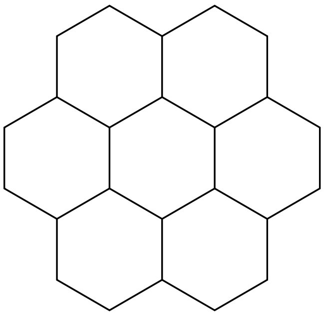
(公財) 数学オリンピック財団

問　　題[*1]

2025 年 1 月 13 日 試験時間 3 時間 12 題 (答のみを記入する)

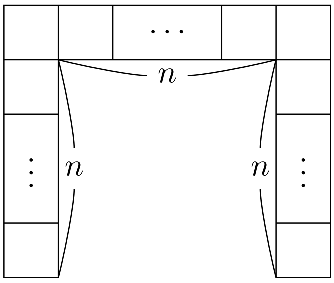
1. 図のように正六角形のマスが 7 個並んでおり, それぞれのマスに 1 以上 7 以下の整数を重複のないように 1 つずつ書き込む. 辺を共有して隣りあうどの 2 マスについても書き込まれた整数の和が 10 以下となるように書き込む方法は何通りあるか.

ただし, 回転や裏返しにより一致する書き込み方も異なるものとして数える.



2. $abcd = 2025$ をみたす正の整数の組 (a, b, c, d) であって, ab, bc, cd, da がいずれも平方数であるようなものはいくつあるか.

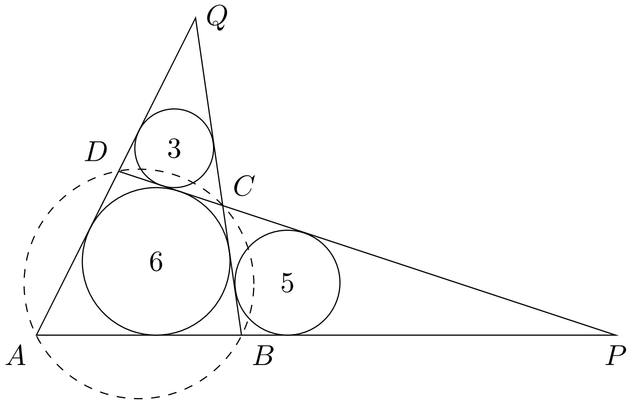
3. 正の整数 n に対して, 図のような $3n + 2$ マスからなるピースを P_n とよぶ. いま, ピース P_1, P_2, P_4, P_5, P_7, P_8 が 1 枚ずつある. 10×10 のマス目にこれら 6 枚をマス目にそって重なりなく置く方法は何通りあるか. ただし, ピースを回転させてもよい. また, マス目の回転や裏返しにより一致する置き方も異なるものとして数える.



4. 1 以上 1000 以下の整数であって, 2, 3, 4, 5, 6 それぞれで割った余りがどの 2 つも異なるようなものはいくつあるか.

5. 円に内接する四角形 $ABCD$ が半径 6 の円に外接している．また, 半直線 AB と半直線 DC が点 P で交わり, 半直線 AD と半直線 BC が点 Q で交わっている．三角形 PBC, QCD の内接円の半径がそれぞれ 5, 3 であるとき, $\dfrac{BC}{CD}$ の値を求めよ．

ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする．



6. 正の整数からなる 2 つの数列 $a_1, a_2, \dots$ と $b_1, b_2, \dots$ があり, 任意の正の整数 n について以下をみたしている．

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{a_n}{2}, b_n + \frac{a_n}{2}\right) \text{ または } (a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(a_n + \frac{b_n}{2}, \frac{b_n}{2}\right) \text{ が成立する．}$$

このとき, (a_1, b_1) としてありうる 40 以下の正の整数の組はいくつあるか．

7. 縦 20 マス, 横 25 マスのマス目があり, はじめどのマスにも何も書かれていない．太郎さんはこのマス目を使いゲームを行った．ゲームは何回かのターンに分けて行い, n 回目のターンには以下の操作を行う．

> 正の整数 k と, 何も書かれていない k 個のマス $A_1, A_2, \dots, A_k$ であって, 任意の 1 以上 $k-1$ 以下の整数 i に対して A_{i+1} が A_i の右または上に隣接するようなものを選ぶ．これら k マスすべてに n を書き込む．

すべてのマスに数が書き込まれたときゲームを終了する．太郎さんがゲーム終了までのターン数をなるべく少なくするように行動するとき, ゲームが終了したときの数字の書き込まれ方としてありうるものは何通りあるか．

ただし, 回転や裏返しによって一致する書き込まれ方も異なるものとして数える．

8. 3 以上の整数 n に対し, 整数からなる列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ が**美しい列**であるとは, 次の条件をすべてみたすことをいう．

- $0 = a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.
- $a_i = 2025$ をみたす 1 以上 n 以下の整数 i が存在する．
- 任意の $i < j < k$ をみたす 1 以上 n 以下の整数 i, j, k に対し, $\dfrac{a_i + a_k}{2} \leqq a_j$ が成り立つ．

美しい列の長さとしてありうる最大の値を N とおく．長さ N の美しい列 $a_1, a_2, \dots, a_N$ について, a_N としてありうる最小の値を求めよ．

ただし, 整数からなる列 $x_1, x_2, \dots, x_l$ の長さは l である．

9. 鋭角三角形 ABC があり, その外心を O とする．A から辺 BC におろした垂線の足を D とすると, $\angle AOD = 90^\circ$, $OD = 4\sqrt{7}$ が成立した．D から辺 AB, AC におろした垂線の足をそれぞれ E, F とおくと, 線分 AO と線分 EF が点 P で交わった．$AP = 11$ のとき, 線分 EF の長さを求めよ．ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする．

10. $S = \{0, 1, 2, \ldots, 8\}$ とおく．S 上で定義され S に値をとる関数 f であって, 任意の S の要素 x, y, z に対して, $x + y - z$ が 9 の倍数ならば $f(x)f(y) - f\big(f(z)\big)$ も 9 の倍数であるようなものはいくつあるか.

11. JMO 星団は, はじめ 5 つの星 O, A, B, C, D からなっており, それぞれの星には**重要度**とよばれる値が割り当てられている．O の重要度は 0 であり, A, B, C, D の重要度は 1 である．また, O から A および C へ, A から B および D へ, B から O へ, C から B および D へ, D から O へ向かう一方向の直行便が開設されており, ほかに直行便はない.

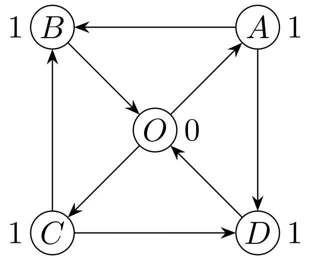
JMO 星団では星の老朽化を防ぐために, 次の一連の行動からなる操作を定期的に行うことにした.

(1) 今あるすべての直行便を廃止し, すべての星を破壊する.

(2) 今回の操作の (1) で廃止したすべての直行便 f に対して, それに対応する星 S_f を 1 つずつ建設する．その後, S_f の重要度として, f が出発する星と到着する星の重要度の和を割り当てる.

(3) 今回の操作の (1) で廃止した 2 つの直行便の組 (f, f') であって, f が到着する星と f' が出発する星が一致するようなものすべてについて, S_f から $S_{f'}$ に向かう一方向の直行便を開設する.

このとき, 100 回目の操作で建設した星の重要度の総和を求めよ.



12. 円 Ω に内接する五角形 $ABCDE$ があり, $AC = AD$ および $BC \parallel DE$ をみたしている．また, Ω の A を含まない方の弧 CD 上に点 P をとり, 直線 AB, BC, CD, DE, EA に関して P と対称な点をそれぞれ P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 とすると, $PC : PD = P_1P_2 : P_4P_5 = 2 : 3$, $CD : P_2P_4 = 4\sqrt{2} : 11$ が成立した．このとき, $\dfrac{P_1P_3}{P_1P_5}$ の値を求めよ.

ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.

以上

第35回日本数学オリンピック予選

解答用紙

受験番号					
氏名					

1	2	3
72通り	44個	512通り

4	5	6
49個	$\frac{15}{11}$	1064

7	8	9
$20!^3$通り	2057	$2\sqrt{61}$

10	11	12
858個	$\frac{2^{68}(2^{102}-1)}{3}$	$\frac{\sqrt{37}}{10}$

受験番号					
会場内通し番号					

合計点