



Language: Japanese

Day: 1

2026年4月11日土曜日

問題 1. 2026×2026 のマス目がボルドー的であるとは、 2026^2 個のマスのうち 1 つ以上が赤く塗られていることをいう。また、いくつかのマスからなる長方形領域が奇妙であるとは、その中の赤く塗られたマスの個数が奇数であることをいう。

次が成り立つような正の整数 M としてありうる最大の値を求めよ。

任意のボルドー的な 2026×2026 のマス目について、 M 個以上のマスからなる奇妙な長方形領域が存在する。

ただし、長方形領域とは、マス目に沿った辺からなる長方形で囲まれた領域のことである。

問題 2. n を正の整数とする。はじめ黒板に 1 が書かれており、マリーは次の操作を好きなだけ行う。

$1 \leq j \leq n$ をみたま整数 j を選び、黒板に書かれた数 V を消して、 $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$ に書き換える。

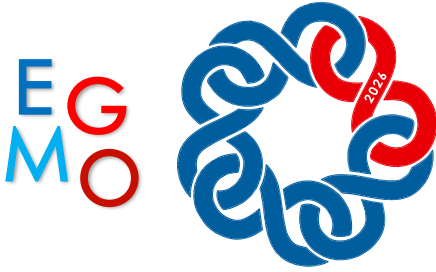
ただし、 $R(x)$ で x に最も近い整数を表す。なお、 x が 2 つの連続する整数 $l, l+1$ のちょうど中間である場合は、 $R(x)$ は $l+1$ を表す。たとえば、 $R(1.3) = 1$ 、 $R(1.5) = R(1.8) = 2$ である。

- 任意の正の整数 n に対して、ある正の整数 B が存在して、マリーは B より大きい数を黒板に書けないことを示せ。
- 正の整数 n に対して、有限回の操作で黒板に書くことができるような整数のうち最大のものを $f(n)$ で表す。正の整数 N であって、 N 以上の任意の整数 n について $f(n)$ が 2026 の倍数となるようなものが存在することを示せ。

問題 3. 実数に対して定義され実数値をとる関数 f であって、任意の実数 x, y に対して

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y)f(x + y)$$

が成り立つようなものをすべて求めよ。



Language: Japanese

Day: 2

2026年4月12日日曜日

問題 4. 実数からなる数列 a_1, a_2, \dots は, $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$ および, 任意の正の整数 n に対して $a_n = a_{2n} + a_{2n+1}$ をみたしているとする. $r = 2026^{2026}$ とおくととき,

$$\frac{1}{r} \leq a_r \leq \frac{2}{r+1}$$

が成り立つことを示せ.

問題 5. $AB < AC$ をみたす鋭角三角形 ABC があり, その外接円を ω , 外心を O とする. ω の B における接線と C における接線の交点を K とし, 三角形 ABK の外接円と直線 BC の交点のうち B でない方を Z とする. 線分 KZ の中点を L とし, 直線 KZ と直線 AB の交点を X とする. 三角形 ABL の外接円上の点 V を, 直線 BC に関して A と同じ側にあり, また直線 OV と直線 KZ が垂直に交わるようにとる. (このような V が一意に存在することは認めてよい.) このとき, 直線 LV と直線 CX は垂直に交わることを示せ.

問題 6. p を素数とし, n を p の倍数でない正の整数とする. n の正の約数の個数を k とし, n の正の約数を小さい順に $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$ とおく. 各 $i = 1, 2, \dots, k$ に対して, d_i^2 の正の約数 l であって $d_i - l$ が p の倍数であるようなものの個数を c_i とおく. このとき,

$$(p-1)(c_1 + c_2 + \dots + c_k) \geq k^2$$

が成り立つことを示せ.