



水曜日, 15. 7 月 2026

問題 1. 相異なるとは限らない 1 より大きい整数 2026 個が黒板に書かれている. 孔子は一回の操作で, 黒板の異なる場所に書かれている 1 より大きい 2 つの整数 m, n を選び, それらを

$$\gcd(m, n), \quad \frac{\text{lcm}(m, n)}{\gcd(m, n)}$$

に書き換える. 孔子はこの操作を, 操作が行えなくなるまで繰り返す.

(a) 孔子の操作の行い方によらず, 有限回の操作の後で, 黒板に書かれた 1 より大きい整数が M だけ 1 つになることを示せ.

(b) M の値は, 孔子の操作の行い方によらないことを示せ.

(正の整数 x, y に対して, $\gcd(x, y)$ で x と y の最大公約数, $\text{lcm}(x, y)$ で x と y の最小公倍数を表す.)

問題 2. 三角形 ABC があり, M, N をそれぞれ辺 AB, AC の中点とする. K, L をそれぞれ三角形 BMC, BNC の境界を含まない内部の点であって, K が三角形 ABL の境界を含まない内部に, L が三角形 AKC の境界を含まない内部にあるようにとる. ここで,

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC, \quad \angle LCK = \angle BMK$$

が成り立ったとする. O を三角形 AKL の外心とすると, $OM = ON$ が成り立つことを示せ.

問題 3. n を正の整数とする. 前田さんと本多さんは長さ 1 の棒を切って取り分けようとしている. まず, 前田さんは高々 n 個の点を棒に書き, その後本多さんは高々 n 個の点を棒に書く. ここで, 書かれたすべての点は相異なる場所にあるようにする. そして, 点が書かれたすべての場所で棒を切り, いくつかの断片に分ける. その後前田さんから交互に, まだ選ばれていない断片を選び, 自分のものにする. 両プレイヤーの目的は, 自分が得た断片の長さの総和をできるだけ大きくすることである.

本多さんの行動によらず, 前田さんは自分の得た断片の長さの総和を必ず c 以上にできるような c としてありうる最大の値を, 各 n に対して求めよ.



木曜日, 16. 7 月 2026

問題 4. 黒田さんと近藤さんがゲームを行う. ゲーム開始時, $0^\circ < \theta < 180^\circ$ をみたす角度 θ が両プレイヤーに知らされている. はじめ, 黒田さんは好きな形状の紙の三角形 T を作る. その後, 以下の操作を繰り返す.

- T の少なくとも 1 つの角度がちょうど θ のとき, ゲームはそこで終了し, 近藤さんの勝ちとなる.
- そうでないとき, 近藤さんは T の外周上に, 3 頂点のいずれとも異なる点 P をとる. そして, P とその向かい合う頂点を結ぶ直線で, T を 2 つの三角形に分割する.
- 黒田さんは一方の三角形を捨て, 残ったもう一方の三角形を新しく T とする.

このとき, 黒田さんの行動にかかわらず, 有限回の操作後に近藤さんが必ず勝つことのできるような θ をすべて求めよ.

問題 5. $\mathbb{R}_{>0}$ を正の実数全体からなる集合とする. 関数 $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ であって, 任意の $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

が成り立つものをすべて求めよ.

問題 6. $a_1, a_2, a_3, \dots$ を 1 より大きい整数からなる無限数列とする. 任意の正の整数 n に対して, a_{n+1} は, $\gcd(a_{n+1}, a_i) > 1$ が各 $i = 1, 2, \dots, n$ に対して成り立つ a_n より大きい正の整数としてありうる最小のものである. このとき, 正の整数 T, L であって, 任意の正の整数 n に対して

$$a_{n+T} = a_n + L$$

が成り立つようなものが存在することを示せ.

(正の整数 x, y に対して, $\gcd(x, y)$ で x と y の最大公約数を表す.)