2026年日本女子数学オリンピック本選

(公財) 数学オリンピック財団

問　題[*1]

2026年1月12日 試験時間4時間5題

1. 100×100 のマス目があり，このうち 2500 個のマスを黒く塗ったところ，どの相異なる 2 つの黒く塗られたマスも，辺や頂点を共有しなかった．このとき，黒く塗られたマスのうち，上から 1 行目，上から 100 行目，左から 1 列目，左から 100 列目のいずれかに位置するものの個数としてありうる最小の値を求めよ．

2. $a_1, a_2, \ldots$ を正の整数からなる数列とし，正の整数 n に対して実数 b_n を

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

と定める．いま，$b_1, b_2, \ldots$ はすべて正の整数であり，$b_1, b_2, \ldots$ にすべての正の整数がちょうど 1 回ずつ現れた．このとき，数列 $a_1, a_2, \ldots$ としてありうるものをすべて求めよ．

3. $2^m = 8n^6 + n^2 - 1$ をみたす正の整数の組 (m, n) をすべて求めよ．

4. $1 \leqq i < j \leqq 100$ をみたす整数の組 (i, j) それぞれに対し，「$x_i = x_j$」と「$x_i \neq x_j$」のうちいずれか一方の式が黒板に書かれている．黒板に書かれた式によらず次が成立するような，最大の非負整数 m を求めよ．

> $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ それぞれに 0 または 1 をうまく割り当てることで，それらを黒板に書かれた式に代入したときに m 個以上が成立するようにできる．

5. $AB < AC$ なる鋭角三角形 ABC の外心を O とし，$\angle A$ 内の傍心を J とする．J を通り直線 AO に垂直な直線と三角形 BCJ の外接円の交点のうち J でない方を P とする．直線 BP 上に B と異なる点 Q，直線 CP 上に C と異なる点 R を，$AB = AQ$, $AC = AR$ をみたすようにとる．

このとき，三角形 ABC の内心と三角形 PQR の垂心は一致することを示せ．

ただし，XY で線分 XY の長さを表すものとする．また，三角形 ABC の $\angle A$ 内の傍心とは，線分 BC，半直線 AB，半直線 AC に接する円のうち，内接円でないものの中心をさす．

以上