

試験時間：4 時間 30 分

問題数：3 問

配点：各問 7 点

©2026 著作権は数学オリンピック財団に属する。

第 1 問 n を 2 以上の整数とする. 2 つの黒板 A と B があり, A に相異なる整数 n 個, B に相異なる整数 n 個が書かれている (A と B に同じ整数が書かれていてもよい).

ここで, 次の操作を繰り返すことを考える.

$X = \{a + b \mid a \text{ は黒板 A に書かれており, } b \text{ は黒板 B に書かれている}\}$ とおく. A に書かれた n 個の数を X の元のうち小さい方から n 個に書き換え, B に書かれた n 個の数を X の元のうち大きい方から n 個に書き換える.

このとき, ある正の整数 N が存在して, 任意の N 以上の整数 k について以下の条件をみたすことを示せ.

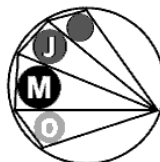
k 回目の操作が終わったとき, A に書かれた n 個の数を小さい順に並べてできる数列は等差数列であり, B に書かれた n 個の数を大きい順に並べてできる数列も等差数列である.

第 2 問 次が成り立つような非負実数 t としてありうる最大の値を求めよ.

n を任意の正の整数とし, $a_1, a_2, \dots, a_n$ を相異なる整数からなる任意の数列とする. 整数の組 (i, j) であって, $1 \leq i < j \leq n$ かつ $a_i > a_j$ が成り立つものの個数を A とし, そのうちさらに $j - i$ が奇数であるものの個数を B とすると, $B \geq tA$ が成り立つ.

第 3 問 $AB < AD$ なる平行四辺形 $ABCD$ があり, $BE > DE$ となるように線分 BD 上に点 E をとる. また, 線分 AE (端点を除く) 上の点 F が $AF = BD$ をみたした. ここで, それぞれ $\angle AEB$ の二等分線, $\angle AED$ の二等分線上にある点 X, Y について, 直線 XY と直線 CF は直交し, さらに線分 XY の中点を M とすると $BM = DM$ をみたした. 線分 EM の中点を N とする. いま, 三角形 ABD の外接円と三角形 BEF の外接円が B でない点 P で交わり, 三角形 ABD の外接円と三角形 DEF の外接円が D でない点 Q で交わっている. さらに, 直線 BP と直線 AD の交点を K , 直線 DQ と直線 AB の交点を L とする. このとき, 平行四辺形 $ABCD$ にのみ依存するある点 Z があり, 点 E のとり方によらず Z は N を通り直線 KL に垂直な直線上にあることを示せ. ただし, UV で線分 UV の長さを表すものとする.

以 上



試験時間：4 時間 30 分

問題数：3 問

配点：各問 7 点

©2026 著作権は数学オリンピック財団に属する。

第 4 問 横一列に並んでいる同数の白玉と黒玉に対する次のような一連の操作を**平等な操作**とよぶ。

連続して並ぶ 1 つ以上の玉であって、白玉の個数と黒玉の個数が同数であるようなものを選ぶ。その後、選んだ玉すべてを取り除き、それらより右にある玉すべてを順番を保ったまま左に動かして間を詰める。

任意の 0 以上 2025 以下の整数 k に対して以下が成り立つような、最小の正の整数 N を求めよ。

2025 個の白玉と 2025 個の黒玉をどのように横一列に並べても、平等な操作を高々 N 回続けて行うことで、ちょうど $2k$ 個の玉が残るようにできる。

第 5 問 正の整数に対して定義され正の整数値をとる関数 f であって、任意の正の整数 n に対して

$$f^{n+2}(1) = f(n) + 2$$

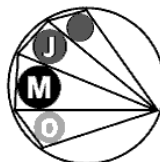
が成り立つようなものをすべて求めよ。ただし、 $f^k(n)$ で $\underbrace{f(f(\cdots f(n)\cdots))}_{k \text{ 個}}$ を表すものとする。

第 6 問 c を正の実数とする。このとき、正の整数 N が存在し、任意の N 以上の整数 n と任意の 1 以上 n^c 以下の整数 a, b に対して以下の命題が成立することを示せ。

$\phi(a+k) = \phi(b+k)$ が任意の 1 以上 n 以下の整数 k について成立するならば、 $a = b$ である。

ただし、 n と互いに素な 1 以上 n 以下の整数の個数を $\phi(n)$ で表す。

以 上



試験時間：4 時間 30 分

問題数：3 問

配点：各問 7 点

©2026 著作権は数学オリンピック財団に属する。

第 7 問 円 Γ に内接する六角形 $ABCDEF$ があり、 $AC = AE$, $DB = DF$ をみたしている。線分 BE と線分 CF の交点を K とし、三角形 KBC , KEF の内心をそれぞれ I_1 , I_2 とする。また、直線 AK と Γ が A , D と異なる点 P で交わり、直線 DK と Γ が A , D と異なる点 Q で交わっている。三角形 PI_1I_2 の外接円と三角形 KPQ の外接円の交点のうち P でない方を X , 三角形 PI_1I_2 の外接円と直線 PA の交点のうち P でない方を Y とおくと、 $\angle KXY = 90^\circ$ が成り立つことを示せ。

ただし、 UV で線分 UV の長さを表すものとする。

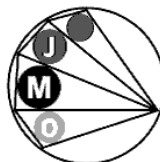
第 8 問 2^{2025} より大きい整数の組 $(a_1, a_2, \dots, a_{2025})$ であって、任意の 1 以上 2025 以下の整数 i に対して a_i が $a_{i-1} + a_{i+1} - 1$ を割りきるようなものは存在しないことを示せ。ただし、 $a_0 = a_{2025}$, $a_{2026} = a_1$ とする。

第 9 問 45×45 のマス目があり、そのマスのうち 1 つにうさぎがいる。うさぎは辺を共有して隣りあうマスに移動することを 2024 回繰り返して、すべてのマスをちょうど 1 回ずつ訪れた。このとき、各マスに相異なる 1 以上 2025 以下の整数を 1 つずつ書き込むことで、以下の条件をともにみたすようにできることを示せ。

- 同じ行に位置するどの隣りあう 2 マスについても、うさぎが先に訪れたマスにはより大きな整数が書かれている。
- 同じ列に位置するどの隣りあう 2 マスについても、うさぎが先に訪れたマスにはより小さな整数が書かれている。

ただし、うさぎが最初にいたマスを、うさぎは最初に訪れたものとみなす。

以 上



試験時間：4 時間 30 分
問 題 数：3 問
配 点：各問 7 点

©2026 著作権は数学オリンピック財団に属する。

第 10 問 正の整数に対して定義され整数値をとる関数 f であって、任意の正の整数 n と n の任意の正の約数 d に対して次の条件が成り立つようなものをすべて求めよ。

n の正の約数 e であって、 $d + f(e)$ が n で割りきれられるようなものが存在する。

第 11 問 $AB < AC$ をみたす鋭角三角形 ABC があり、その外接円を Γ とする。 B を通り直線 AC に垂直な直線と Γ の交点のうち B でない方を D とし、 Γ 上の B でない点 Q を、 $AB = AQ$ をみたすようにとる。直線 BQ と直線 AC の交点を R とし、直線 DR と Γ の交点のうち D でない方を S とする。三角形 QRS の外接円と辺 BC の交点を T とし、直線 TQ と直線 RS の交点を X とするとき、直線 CX と直線 AB は垂直に交わることを示せ。ただし、 UV で線分 UV の長さを表すものとする。

第 12 問 A さんと B さんが次のゲームを行う。まず、 A さんは 1 枚以上のカードを用意し、そのそれぞれに相異なる^{あい}とは限らない 0 ではない実数を 1 つずつ書く。その後、2 人は以下の一連の操作を繰り返し行う。

- B さんは実数が書かれたカードすべてを横一列に好きな順番に並べる。
- 並べられたカードに書かれた実数を左から順に $a_k, a_{k-1}, \dots, a_0$ としたとき、 A さんは $a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_0 = 0$ をみたす実数 x を 1 つ選び、新しいカードにその値を書く。ただし、そのような実数 x が存在しないとき、ゲームは終了となる。

B さんの行動によらず、 A さんはゲームが終了しないように最初にカードに実数を書き、行動し続けることは可能か。

以 上